L3 S1 Logique
Épreuve 2 : Sémantique de la logique des prédicats

Matteo Manighetti

Solutions mises à jour le : 14 décembre 2023

1. (6 points) Soit $L = (R^2, n)$ un langage polyadique du premier ordre, où R est un prédicat à deux places et n est une constante. Soient I_1, I_2 deux structures d'interprétation pour L, composées comme suit :

$$D_1 = \{1, 2, 3\}, I_1 = \{D_1, \{(1, 2), (2, 3), (1, 3)\}, 2\}$$

$$D_2 = \{4, 5, 6\}, I_2 = \{D_2, \{(4, 5), (5, 6), (4, 6)\}, 6\}$$

   Trouver

   (a) Un énoncé qui est satisfait par I_1, mais pas par I_2.

   Solution : $\exists x\ Rnx$

   (b) Un énoncé qui est satisfait par I_2, mais pas par I_1.

   Solution : $\neg\exists x\ Rnx$

   (c) Un énoncé qui est satisfait par les deux.

   Solution : $\exists x \exists y\ Rxy$

2. (6 points) Soit $\mathcal{L}$ le langage avec symboles de prédicats P et Q d'arité 1, et symbole de fonction f d'arité 2. Soit $\mathcal{M}$ la $\mathcal{L}$-structure dont le domaine est $\mathbb{N}$ et telle que $P^{\mathcal{M}} = \{2n | n \in \mathbb{N}\}$, $Q^{\mathcal{M}} = \{2n + 1 | n \in \mathbb{N}\}$ et $f^{\mathcal{M}}(n, m) = n + m$. Dire si les formules suivantes sont vraies dans $\mathcal{M}$:

   (a) $\forall x \forall y (Px \vee Py)$

   (b) $\forall x \exists y (P(x) \wedge Q(y))$

   (c) $\forall x \forall y (P(x) \wedge P(y)) \to P(f(x, y))$

Solution :

(a) Fausse. On peut considérer la valuation σ telle que $\sigma(x) = 1$ et $\sigma(y) = 3$. Alors $\mathcal{M}, \sigma \not\models Px \vee Py$.

(b) Fausse. On peut considérer la valuation σ telle que $\sigma(x) = 1$. Alors $\mathcal{M}, \sigma \not\models \exists y(P(x) \wedge Q(y))$.

(c) Attention la formule telle qu'elle est écrite est fausse (prendre la même valuation qu'en (b)). Beaucoup ont intérpreté la formule comme $\forall x \forall y((P(x) \wedge P(y)) \rightarrow P(f(x, y)))$ qui est vraie. J'ai accepté les deux.

$\forall x \forall y((P(x) \wedge P(y)) \rightarrow P(f(x, y)))$ est vraie dans $\mathcal{M}$. Soit en fait σ une valuation quelconque. Alors $\mathcal{M}, \sigma \models \forall x \forall y((P(x) \wedge P(y)) \rightarrow P(f(x, y)))$ ssi pour tout $n, m \in \mathbb{N}$, si $n \in P^{\mathcal{M}}$ et $m \in P^{\mathcal{M}}$, alors $n + m \in P^{\mathcal{M}}$. Or, si $n \in P^{\mathcal{M}}$, alors $n = 2k$ pour un certain $k \in \mathbb{N}$. De même, si $m \in P^{\mathcal{M}}$, alors $m = 2l$ pour un certain $l \in \mathbb{N}$. Donc $n + m = 2(k + l) \in P^{\mathcal{M}}$.

3. (6 points) Montrer la conséquence logique, ou donner un contre-exemple :

(a) $\forall x Fx, \forall x(Fx \rightarrow Gx) \models \forall x Gx$

(b) $\forall x\ (Px \vee Qx) \not\models (\forall x\ Px \vee \forall x\ Qx)$

Solution :

(a) Soit $\mathcal{M}$ une $\mathcal{L}$-structure et σ une valuation telles que $\mathcal{M}, \sigma \models \forall x Fx$ et $\mathcal{M}, \sigma \models \forall x(Fx \rightarrow Gx)$. Alors, pour toute variation σ' de σ, on a $\mathcal{M}, \sigma' \models Fx$ et $\mathcal{M}, \sigma' \models Fx \rightarrow Gx$. Ce deuxième fait implique, par définition, que soit $\mathcal{M}, \sigma' \not\models Fx$, soit $\mathcal{M}, \sigma' \models Gx$. Comme on sait que $\mathcal{M}, \sigma' \models Fx$, on a donc $\mathcal{M}, \sigma' \models Gx$ pour toute variation σ' de σ. Alor, par définition, $\mathcal{M}, \sigma \models \forall x Gx$.

(b) On montre que la conséquence logique est fausse en donnant un contre-exemple. Soit $\mathcal{M}$ une $\mathcal{L}$-structure avec $M = \{1, 2\}$, $P^{\mathcal{M}} = \{1\}$ et $Q^{\mathcal{M}} = \{2\}$. Alors $\mathcal{M}, \sigma \models \forall x\ (Px \vee Qx)$, mais $\mathcal{M}, \sigma \not\models (\forall x\ Px \vee \forall x\ Qx)$.

4. (2 points) Montrer que si $\Gamma \models A$ et $\{A\} \cup \Delta \models B$, alors $\Gamma \cup \Delta \models B$

Solution : On veut montrer que tout modèle de $\Gamma \cup \Delta$ est modèle de B. Soit $\mathcal{M}$ une $\mathcal{L}$-structure et σ une valuation telles que $\mathcal{M}, \sigma \models \Gamma \cup \Delta$. Alors $\mathcal{M}, \sigma \models \Gamma$ et $\mathcal{M}, \sigma \models \Delta$. Par hypothèse, tout modèle de Γ est modèle de A, et donc $\mathcal{M}, \sigma \models A$. On a donc $\mathcal{M}, \sigma \models \Delta \cup \{A\}$, et par hypothèse $\mathcal{M}, \sigma \models B$.