L3 S1 Logique
Séance 5 : Rélations et fonctions

Matteo Manighetti

14 décembre 2023

Exercices

1. Prouver que $|\mathcal{P}(A)| = 2^{|A|}$ pour tout ensemble A.

   Solution : Map with binary sequences.

2. Soient X et Y des ensembles et $f : X \to Y$ une fonction. Montrer que f est bijective ssi la relation inverse f^{-1} est une fonction de Y dans X.

3. Dire si chacune des fonctions suivantes est injective, surjective, bijective ou rien de tout cela, en justifiant la réponse.
   (a) $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ où $f(n) = n + 1$
   (b) $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ où $f(n) = n + 1$
   (c) $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ où $f(n) = n^2$
   (d) $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ où $f(n) = n^2$

4. Déterminer si R est une relation d'équivalence sur a pour :
   (a) $a = \mathbb{Z}$ et $R = \{(y, w) \in \mathbb{Z}^2 | y \text{ divise } w\}$
   (b) $a = \mathbb{Z}$ et $R = \{(y, w) \in \mathbb{Z}^2 | y + w \text{ est pair}\}$
   (c) $a = \mathbb{Z}$ et $R = \{(y, w) \in \mathbb{Z}^2 | y = wouy = -w\}$
   (d) $a = \mathbb{R}$ et $R = \{(y, w) \in \mathbb{R}^2 | y - w \in \mathbb{Z}\}$

5. Montrer que si (a, R) est un ensemble bien ordonné alors R est un ordre total sur A. Montrer que la réciproque est fausse.

Solution : Rappel : le bon ordre se définit comme suit : soient A un ensemble et R un ordre sur A, R est un bon ordre sur A ssi pour tout $s \subseteq A$, si $s \neq \emptyset$ alors $\exists p(p \in s \wedge \forall y((y \in s) \rightarrow Rpy))$. (i. e : A est bien ordonné ssi tout sous-ensemble non-vide de A possède un R-premier élément).

Soient z et w deux éléments de A avec $z \neg = w$ et (A, R) un ensemble bien ordonné. Soit $E = \{z, w\}$. L'ensemble E est non-vide car $z \neg = w$. Puisque A est bien ordonné et que E est un sous-ensemble non-vide de A, E possède un R-premier élément par définition du bon ordre. Si cet élément est z, alors Rzw, si cet élément est w alors Rwz. Nous avons donc montré que $\forall z \forall w((z \in a \wedge w \in a \wedge z \neq w) \rightarrow (Rzw \vee Rwz))$ C'est-à-dire que toute paire d'élément de A est R-comparable. C'est-à-dire que R est un ordre total.

La réciproque est fausse : $\mathbb{Z}$ est totalement ordonné mais pas bien ordonné (il ne comporte pas de plus petit élément pour l'ordre (large) usuel).

6. Montrer que ${}^{\emptyset}Y$ a exactement un élément, $\emptyset$, que Y soit vide ou pas (c.à.d ${}^{\emptyset}Y = \{\emptyset\}$).

Solution : Suppose that Y is a set. Consider f = Y ∅. From page thirty, and by a previous theorem, we have f ⊂ P(∅ × Y) = P(∅) = ∅, where f is a set of elements which are ordered pairs. From the comments in section seven, ∅ is a set of ordered pairs. It follows that f = ∅.

7. Montrer que si $X \neq \emptyset$, alors ${}^{X}\emptyset$ est vide ; c.à.d. ${}^{X}\emptyset = \emptyset$

Solution : Suppose that there is some function $f \in {}^{X}\emptyset$. Then, for all x ∈ X, there exists some b ∈ ∅ such that (x, b) ∈ f . However, this is not true, since ∅ contains no elements. Thus, ${}^{X}\emptyset$ = ∅.