L3 S1 Logique
Séance 7 : Modèles d'un langage du premier ordre

Matteo Manighetti

14 décembre 2023

Exercices

1. On considère un langage $\mathcal{L} = (\mathsf{P}, \mathsf{Q})$ et l'interprétation :

$$\mathcal{I} = \left(D = \{0, 1, 2\}, P^{\mathcal{I}} = \{2\}, Q^{\mathcal{I}} = \{0, 2\}\right).$$

A-t-on :

(a) $\mathcal{I} \vDash \exists x \left(\mathsf{P}x \wedge \mathsf{Q}x\right)$

> **Solution :**
> On considère une assignation s_2 telle que $s_2(x) = 2$.
> $s_2(x) \in P^{\mathcal{I}}$ et $s_2(x) \in Q^{\mathcal{I}}$
> donc $\mathcal{I} \vDash \mathsf{P}x\ [s_2]$ et $\mathcal{I} \vDash \mathsf{Q}x\ [s_2]$
> donc $\mathcal{I} \vDash \mathsf{P}x \wedge \mathsf{Q}x\ [s_2]$
> donc, pour $2 \in D$, on a $\mathcal{I} \vDash \mathsf{P}x \wedge \mathsf{Q}x\ [s_2]$.
> donc $\mathcal{I} \vDash \exists x \left(\mathsf{P}x \wedge \mathsf{Q}x\right)$

(b) $\mathcal{I} \vDash \exists x \left(\mathsf{P}x \wedge \neg\mathsf{Q}x\right)$

> **Solution :** On veut trover une valuation s telle que $\mathcal{I} \vDash \mathsf{P}x \wedge \neg\mathsf{Q}x\ [s]$ Comme D est fini, on peut vérifier exhaustivement si une telle valuation existe. Pour chaque i tel que $0 \leq i \leq 2$, soit s_i telle que $s_i(x) = i$. On a :
> $s_0(x) \notin P^{\mathcal{I}}$ donc $\mathcal{I} \nvDash \mathsf{P}x\ [s_0]$ donc $\mathcal{I} \nvDash \mathsf{P}x \wedge \neg\mathsf{Q}x\ [s_0]$
> $s_1(x) \notin P^{\mathcal{I}}$ donc $\mathcal{I} \nvDash \mathsf{P}x\ [s_1]$ donc $\mathcal{I} \nvDash \mathsf{P}x \wedge \neg\mathsf{Q}x\ [s_1]$
> $s_2(x) \in Q^{\mathcal{I}}$ donc $\mathcal{I} \vDash \mathsf{Q}x\ [s_2]$ donc $\mathcal{I} \nvDash \neg\mathsf{Q}x\ [s_2]$ donc $\mathcal{I} \nvDash \mathsf{P}x \wedge \neg\mathsf{Q}x\ [s_2]$

(c) $\mathcal{I} \vDash \exists x \left(\neg\mathsf{P}x \wedge \neg\mathsf{Q}x\right)$

(d) $\mathcal{I} \vDash \exists x \left(\neg\mathsf{P}x \wedge \mathsf{Q}x\right)$

(e) $\mathcal{I} \vDash \forall x\,(\mathsf{P}x \to \mathsf{Q}x)$

> **Solution :** On doit prouver que pour toute valuation s, on a que $\mathcal{I} \vDash \mathsf{P}x \to \mathsf{Q}x\ [s]$. Soit s une valuation quelconque. Pour que $\mathcal{I} \vDash \mathsf{P}x \to \mathsf{Q}x\ [s]$ soit le cas, ça doit être que $\mathcal{I} \nvDash \mathsf{P}x\ [s]$ ou que $\mathcal{I} \vDash \mathsf{Q}x\ [s]$. On distingue deux cas, en dépendant de la valeur de $s(x)$: si $s(x) = 2$, alors $\mathcal{I} \vDash \mathsf{Q}x\ [s]$ et la disjonction est vérifiée. Si au contraire $s(x) \neq 2$, alors $\mathcal{I} \nvDash \mathsf{P}x\ [s]$ et la disjonction est vérifiée.

(f) $\mathcal{I} \vDash \forall x\,(\neg\mathsf{P}x \to \mathsf{Q}x)$

(g) $\mathcal{I} \vDash \exists x\,(\mathsf{P}x \to \mathsf{Q}x)$

(h) $\mathcal{I} \vDash \forall x\,(\mathsf{P}x \vee \mathsf{Q}x)$

> **Solution :** On veut prouver que pour toute valuation s, on a que $\mathcal{I} \vDash \mathsf{P}x \vee \mathsf{Q}x\ [s]$. Ce n'est pas le cas, si on prends la valuation telle que $s(x) = 1$. Dans ce cas, $\mathcal{I} \nvDash \mathsf{P}x$ (car $1 \notin P^{\mathcal{I}}$) et $\mathsf{Q}x\ [s]$ (car $1 \notin Q^{\mathcal{I}}$) et donc $\mathcal{I} \nvDash \mathsf{P}x \vee \mathsf{Q}x\ [s]$.

2. Vérifier formellement les conséquences logiques suivantes

(a) $\forall x Px \vDash \exists x Px$

> **Solution :** Soit $\mathcal{I}$ un modèle de $\forall x Px$. Alors pour toute valuation s, $\mathcal{I} \vDash Px\ [s]$. Soit s_1 une valuation quelconque, on a donc $\mathcal{I} \vDash Px\ [s_1]$. On a trouvé une valuation pour laquelle $\mathcal{I} \vDash Px\ [s_1]$, et donc $\mathcal{I} \vDash \exists x Px$.

(b) $\vDash \exists x(Px \to \forall y Py)$

> **Solution :** Soit $\mathcal{I}$ une interprétation quelconque. Soit s une valuation quelconque, et soit a la valeur qu'elle assigne à x (c'est à dire, $s(x) = a$). On distingue deux cas :
>
> - $a \notin P^{\mathcal{I}}$, et alors $\mathcal{I} \nvDash Px\ [s]$, d'où on obtient $\mathcal{I} \vDash \neg Px\ [s]$ et donc $\mathcal{I} \vDash Px \to \forall y Py\ [s]$. On a trouvé une valuation qui valide la formule existentielle, et donc elle est valide.
>
> - $a \in P^{\mathcal{I}}$, et alors $\mathcal{I} \vDash Px\ [s]$. Soit alors s_1 une variation quelconque de s en y, et $s_1(y) = b$. On a encore deux cas : si $b \in P^{\mathcal{I}}$, alors $\mathcal{I} \vDash Py\ [s_1]$, et donc $\mathcal{I} \vDash \forall y Py\ [s]$ (car s_1 est une variation quelconque de s), et donc $\mathcal{I} \vDash Px \to \forall y Py\ [s]$, et alors $\mathcal{I}$ est un modèle de $\exists x(Px \to \forall y Py)$.
>
>   Si $b \notin P^{\mathcal{I}}$, alors on retombe sur le premier cas, en choisissant une valuation qui assigne b à x.

(c) $\nvDash \exists x Px \to Pc$

(d) $\vDash Pc \to \exists x Px$

(e) $\not\models Pc \to \forall x Px$

(f) $\models \forall x Px \to Pc$

(g) $\not\models \forall x(Px \lor Qx) \to \exists x(Px \land Qx)$

3. Seuls les sages sont heureux et les envieux ne sont pas sages. Alors, il n'y a pas de envieux sage.